ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

(Основные штрихи)

Математический анализ, четвертый семестр, 2012/13 уч. год

Лектор профессор В.А.Зорич

СОДЕРЖАНИЕ

I. Напоминания из алгебры и геометрии

1. Билинейная форма и её координатное представление.
a. Скалярное произведение и общая билинейная форма.
b. Невырожденность билинейной формы.
2. Соответствие вектор — форма.
a. Соответствие вектор — 1-форма в присутствии 2-формы.
b. Соответствие вектор — $(n-1)$-форма.
3. Криволинейные координаты и метрика.
a. Криволинейные координаты, метрика и форма объёма.
b. Ортогональные системы криволинейных координат и орты.
c. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

II. Операторы grad, rot, div в криволинейных координатах

0. Дифференциал формы и операторы grad, rot, div.
1. Градиент функции и его координатное представление.
a. Координатная запись соответствия вектор — 1-форма.
b. Дифференциал функции и градиент.
c. Градиент в цилиндрических и сферических координатах.
2. Дивергенция и её координатное представление.
a. Координатная запись соответствия вектор — $(n-1)$-форма.
b. Дифференциал формы потока и дивергенция поля скорости.
c. Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.
3. Ротор векторного поля и его координатное представление.
a. Соответствие векторное поле A — векторное поле $B = \operatorname{rot} A$.
b. Координатная запись соответствия A и $B = \operatorname{rot} A$.
c. Ротор в цилиндрических и сферических координатах.

Вместо предисловия

Почти в любом задачнике и даже учебнике математического анализа попросту говорится примерно следующее. "Запомните, дети":

Градиентом функции $U(x,y,z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} U := \left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right)\ .$$

Ротором векторного поля $A=(P,Q,R)(x,y,z)$ называется вектор

$$\operatorname{rot} A := \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\ .$$

Дивергенцией векторного поля $B=(P,Q,R)(x,y,z)$ называется функция

$$\operatorname{div} B := \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ .$$

То, что это верно только в декартовых координатах, а также, как и что надо делать, если система координат иная, обычно не обсуждается. Это и понятно, потому что сама постановка такого вопроса уже требует какого-то адекватного определения этих объектов.

I. Напоминания из алгебры и геометрии

1. Билинейная форма и её координатное представление.

a. *Скалярное произведение и общая билинейная форма.*

Нам предстоит рассматривать векторное пространство со скалярным произведением $\langle,\rangle$. Пока можно считать, что $\langle,\rangle$ — обозначение произвольной билинейной формы на n-мерном векторном пространстве X. Если в пространстве выбран базис $\xi_1,\ldots,\xi_n$, то объекты пространства (в частности, векторы и формы) приобретают координатное представление. Напомним это применительно к билинейной форме $\langle,\rangle$.

Взяв два вектора $x=x^i\xi_i,\ y=y^j\xi_j$ в их разложении по выбранному базису, имеем $\langle x,y\rangle=\langle x^i\xi_i,y^j\xi_j\rangle=\langle\xi_i,\xi_j\rangle x^iy^j=g_{ij}x^iy^j$. Здесь, как обычно, всюду подразумевается суммирование по повторяющемуся сверху и снизу индексу. Итак, при заданном базисе пространства набор величин $\langle\xi_i,\xi_j\rangle=g_{ij}$ полностью определяет билинейную форму.

Если форма — скалярное произведение, то базис считается ортогональным, если $g_{ij}=0$ при $i\neq j$. Конечно, тут обычно преполагается невырожденность формы.

b. *Невырожденность билинейной формы.*

Билинейная форма $\langle , \rangle$ называется невырожденной, если она тождественно равна нулю относительно одного из аргументов при фиксированном значении другого лишь в том случае, когда фиксированный аргумент равен нулю (является нулевым вектором).

Невырожденность формы равносильна тому, что определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля. Действительно, если фиксированный вектор $x = x^i \xi_i$ таков, что $\langle x, y \rangle \equiv 0$ относительно y, то $\langle \xi_i, \xi_j \rangle x^i = 0$ и $g_{ij} x^i = 0$ при любом значении $j \in \{1, ..., n\}$. Эта однородная система уравнений имеет единственное (нулевое) решение в точности тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы (g_{ij}) системы.

2. Соответствие вектор — форма.

a. *Соответствие вектор — 1-форма в присутствии 2-формы.*

В присутствии 2-формы $\langle , \rangle$ каждому вектору A можно сопоставить 1-форму — линейную функцию $\langle A, x \rangle$. Если форма $\langle , \rangle$ невырождена, то такое соответствие взаимно однозначно. Действительно, если дана какая-то линейная функция $a(x) = a_j x^j$ (где $a_j = a(\xi_j)$) и мы хотим её представить в виде $\langle A, x \rangle$, где $A = A^i \xi_i$, то на координаты вектора A возникает система уравнений $a(\xi_j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle A^i,\ j \in \{1, ..., n\}$, которая однозначно разрешима, если определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля.

Итак, координаты вектора $A = A^i \xi_i$ и коэффициенты 1-формы a в том же базисе $\{\xi_i\}$ связаны взаимно обратными соотношениями

$$a_j = g_{ij} A^i \qquad A^i = g^{ij} a_j\ .$$

b. *Соответствие вектор — $(n-1)$-форма.*

Аналогично, в присутствии невырожденной n-формы Ω каждому вектору B можно сопоставить $(n-1)$-форму $\Omega(B, ...)$.

Ниже мы будем иметь дело с векторными полями A , B и осуществлять описанные процедуры в касательном пространстве, например, применительно к форме работы $\omega_A^1 = \langle A, . \rangle$ и форме потока $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, ...)$, в присутствии скалярного произведения $\langle , \rangle$ и формы объёма Ω^n соответственно.

3. Криволинейные координаты и метрика.

a. *Криволинейные координаты, метрика и форма объёма.*

Пусть на n-мерной поверхности (многообразии) имеется метрика, которая в каких-то локальных координатах $(t^1, ..., t^n)$ (в локальной карте) задаётся формой $g_{ij}(t)dt^i dt^j$, определяющей скалярное произведение $\langle , \rangle(t)$ в соответствующей параметру t касательной плоскости (касательном пространстве) к поверхности.

Например, если заданная в параметрическом виде поверхность (или кривая) вложена в евклидово пространство, то скалярное произведение в касательных плоскостях (пространствах) к поверхности естественным образом индуцируется из объемлющего пространства.

Мы даже знаем, как находить площадь (n-меру) такой поверхности, — надо интегрировать форму объёма
$\Omega^n = \sqrt{\det g_{ij}(t)} dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$.

b. *Ортогональные системы криволинейных координат и орты.*

Напомним, что система криволинейных координатах $(t^1, ..., t^n)$ называется ортогональной, если $g_{ij}(t) \equiv 0$ при $i \neq j$.

Элемент длины в ортогональных системах криволинейных координат записывается особенно просто

$$ds^2 = g_{11}(t)(dt^1)^2 + ... + g_{nn}(t)(dt^n)^2,$$

что часто переписывают в более компактных обозначениях

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + ... + E_n(t)(dt^n)^2.$$

Векторы $\xi_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \xi_n = (0, ..., 0, 1)$ координатных направлений образуют базис касательного пространства, соответствующего значению параметра t. Но нормы (длины) этих векторов, вообще говоря, не равны единице. Независимо от того, ортогональна ли система координат или нет, всегда $\langle \xi_i, \xi_i \rangle(t) = g_{ii}(t)$, т.е. $|\xi_i| = \sqrt{g_{ii}(t)}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Значит, орты $(e_1, ..., e_n)$(векторы единичной длины) координатных направлений имеют следующие координатные представления

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, ..., 0) \ , \quad ... \quad , \ e_n = (0, ..., 0, \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}}) \ .$$

В частности, если система криволинейных координат ортогональная, то ортонормированным базисом в соответствующем касательном пространстве будет следующая система векторов координатных направлений

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, ..., 0) \ , \quad ... \quad , \ e_n = (0, ..., 0, \frac{1}{\sqrt{E_n}}) \ .$$

c. *Декартовы, цилиндрические и сферические координаты.*

Примерами ортогональных систем координат могут служить стандартные декартовы, цилиндрические и сферические координаты в $\mathbb{R}^3$.

Задача. Запишите метрику $g_{ij}(t)dt^i dt^j$ в каждой из этих систем координат и выпишите ортонормированный базис (e_1, e_2, e_3).

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичная форма $g_{ij}(t)dt^i dt^j$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2 = \\ &= dR^2 + R^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2 + R^2\, d\theta^2. \end{aligned}$$

Для декартовых, цилиндрических и сферических координат тройки ортов координатных направлений имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{array}{lll} e_x = (1, 0, 0)\,, & e_y = (0, 1, 0)\,, & e_z = (0, 0, 1)\,; \\ e_r = (1, 0, 0)\,, & e_\varphi = \left(0, \dfrac{1}{r}, 0\right)\,, & e_z = (0, 0, 1)\,; \\ e_R = (1, 0, 0)\,, & e_\varphi = \left(0, \dfrac{1}{R\cos\theta}, 0\right)\,, & e_\theta = \left(0, 0, \dfrac{1}{R}\right)\,. \end{array}$$

II. Операторы grad, rot, div в криволинейных координатах

0. Дифференциал формы и операторы grad, rot, div.

Дифференциал dU функции U является 1-формой. При наличии скалярного произведения $\langle , \rangle$, как мы знаем, 1-форме dU соответствует определённый вектор A, такой что $dU = \langle A, . \rangle$. Этот вектор называется *градиентом функции* U и обозначается $\operatorname{grad} U$.

Итак $dU = \langle \operatorname{grad} U, . \rangle$.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (или на любом трёхмерном римановом многообразии) взята 1-форма $\omega_A^1 = \langle A, .\rangle$, отвечающая векторному полю A. Дифференциал $d\omega_A^1$ этой формы есть 2-форма ω_B^2, отвечающая, ввиду наличия формы объёма Ω^3, некоторому векторному полю B (т.е. $\omega_B^2 = \Omega^3(B, ., .)$). Тогда поле B называется *ротором векторного поля* A и обозначается $\operatorname{rot} A$.

Итак, $d\omega_A^1 = \omega_{\operatorname{rot} A}^2$.

Если на n-мерной поверхности (например, на $\mathbb{R}^n$) имеется форма объёма Ω^n, то определена $(n-1)$-форма потока векторного поля B, а именно, форма $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, ., .)$. Дифференциал $d\omega_B^{n-1}$ этой $(n-1)$-формы является n-формой, которая, следовательно, имеет вид $\rho\Omega^n$. Коэффициент пропорциональности — функция ρ называется *дивергенцией векторного поля* B и обозначается $\operatorname{div} B$.

Итак, $d\omega_B^{n-1} = (\operatorname{div} B)\ \Omega^n$.

1. Градиент функции и его координатное представление.

a. *Координатная запись соответствия вектор — 1-форма.*

В разделе II, 2, *a* мы вывели связь коэффициентов 1-формы $\omega_A^1 = \langle A, .\rangle$ и координат вектора $A = A^i\xi_i$. Если вместо векторов ξ_i взять одноименные векторы e_i единичной длины, то, поскольку $\xi_i = \sqrt{g_{ii}}e_i$, координаты вектора $A = A_e^i e_i$ в базисе $\{e_i\}$ и его прежние координаты будут связаны соотношениями $A_e^i = A^i\sqrt{g_{ii}}$ при $i \in \{1, ..., n\}$.

Значит новые формулы связи будут иметь вид

$$a_j = g_{ij}\frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}} \qquad \frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}} = g^{ij}a_j\ .$$

Эти формулы позволяют по вектору $A = A_e^i\ e_i$ написать соответствующую форму $\omega_A^1 = \langle A, .\rangle = a_j\ dt^j$ и, наоборот, по 1-форме $\omega^1 = a_j\ dt^j$ найти отвечающий ей вектор $A = A_e^i\ e_i$.

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ укажите явный вид 1-формы $\omega_A^1 = \langle A, .\rangle$, отвечающей вектору $A = A_e^i\ e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ форма ω_A^1 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\omega_A^1 &= A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \\ &= A_r\,dr + A_\varphi r\,d\varphi + A_z\,dz = \\ &= A_R\,dR + A_\varphi R\cos\varphi\,d\varphi + A_\theta R\,d\theta.\end{aligned}$$

b. *Дифференциал функции и градиент.*

Применим общие соотношения связи вектора A и формы ω_A^1 к случаю формы $dU = \langle \operatorname{grad} U, . \rangle$, чтобы найти разложение $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$. Поскольку $dU = \frac{\partial U}{\partial t^j}\, dt^j$, т.е. $a_j = \frac{\partial U}{\partial t^j}$, то $A_e^i = g^{ij}\sqrt{g_{ii}}\, \frac{\partial U}{\partial t^j}$.

В случае ортогональной системы криволинейных координат матрица (g_{ij}) диагональна, как и обратная к ней матрица (g^{ij}), причём $g^{ii} = 1/g_{ii}$. Значит, в этом случае

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\, \frac{\partial U}{\partial t^1}\, e_1 + ... + \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}}\, \frac{\partial U}{\partial t^n}\, e_n \ .$$

c. *Градиент в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.*

Задача. Запишите вектор $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ вектор $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \frac{\partial U}{\partial x} e_x + \frac{\partial U}{\partial y} e_y + \frac{\partial U}{\partial z} e_z = \\
&= \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} e_z = \\
&= \frac{\partial U}{\partial R} e_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta .
\end{aligned}$$

2. Дивергенция и её координатное представление.

a. *Координатная запись соответствия вектор — $(n-1)$-форма.*

Мы знаем, что если в n-мерном векторном пространстве присутствует невырожденная n-форма Ω^n, то каждому вектору B можно взаимно однозначно сопоставить $(n-1)$-форму $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, ...)$. Мы хотим написать явные формулы связи координат вектора $B = B^i\, \xi_i$ и коэффициентов формы $\omega_B^{n-1} = b_i\, x^1 \wedge ... \wedge \widehat{x^i} \wedge ... \wedge x^n$, считая, что оба объекта записаны в одном базисе $\{\xi_i\}$ пространства. Здесь, как всегда, x^i — линейная функция, действие которой состоит в выделении i координаты вектора, т.е. $x^i(v) := v^i$; символ $\widehat{x^i}$ показывает, что соответствующий множитель опущен; а n-форма Ω^n в n-мерном векторном пространстве есть $x^1 \wedge ... \wedge x^n$ или пропорциональна этой стандартной форме объёма, равной единице на наборе $(\xi_1, ..., \xi_n)$ базисных векторов.

Вообще, значение формы $\Omega^n = x^1 \wedge ... \wedge x^n$ на любом наборе $(v_1, ..., v_n)$ векторов равно определителю матрицы (v_i^j), составленной из координат этих векторов, поэтому, учитывая правило разложения определителя по строке, можем написать, что

$\Omega^n(B, ...) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B^i\ x^1 \wedge ... \wedge \widehat{x^i} \wedge ... \wedge x^n.$
Но $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, ...)$, значит,

$\sum_{i=1}^n b_i\ x^1 \wedge ... \wedge \widehat{x^i} \wedge ... \wedge x^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B^i\ x^1 \wedge ... \wedge \widehat{x^i} \wedge ... \wedge x^n.$
Следовательно, $b_i = (-1)^{i-1} B^i$ при любом значении $i \in \{1, ..., n\}$.
Если бы в качестве Ω^n фигурировала форма с $\Omega^n = c\, x^1 \wedge ... \wedge x^n$, то мы, очевидно, имели бы соотношения $b_i = (-1)^{i-1} c\ B^i$ при любом значении $i \in \{1, ..., n\}$.

Напомним ещё, что при наличии в векторном пространстве скалярного произведения $\langle , \rangle$ и фиксированного базиса $\{\xi_i\}$ возникает естественная форма объёма $\sqrt{\det g_{ij}}\ x^1 \wedge ... \wedge x^n$, определяемая, как и само скалярное произведение, в данном базисе величинами $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$.

Наконец, напомним, что при этом векторами единичной длины (нормы) являются, вообще говоря, не векторы базиса $\{\xi_i\}$, а векторы $e_i = \xi_i/\sqrt{g_{ii}}$. Поскольку $\xi_i = \sqrt{g_{ii}}\ e_i$, исходное разложение вектора $B = B^i\ \xi_i$ в базисе $\{\mathrm{e}_i\}$ превратится в $B = B_e^i\ e_i$, где $B_e^i = \sqrt{g_{ii}} B^i$.

Итак, если в пространстве есть скалярное произведение, то имеется естественная форма объёма $\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}\ x^1 \wedge ... \wedge x^n$, и, если $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, ...)$, то коэффициенты формы $\omega_B^{n-1} = b_i\ x^1 \wedge ... \wedge \widehat{x^i} \wedge ... \wedge x^n$ и координаты вектора B в разложении $B = B_e^i\ e_i$ по базисным ортам $e_i = \xi_i/\sqrt{g_{ii}}$ связаны соотношениями

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\det g_{ij}}\ \frac{B_e^i}{\sqrt{g_{ii}}}\ .$$

В ортогональном базисе $\det g_{ij} = g_{11} \cdot ... \cdot g_{nn}$. В этом случае

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{g_{11} \cdot ... \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot ... \cdot g_{nn}}\ B_e^i\ .$$

Всё изложенное, разумеется, остаётся в силе применительно к случаю связи векторного поля $B(t)$ и дифференциальной формы $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, ...)$, порождаемой полем посредством формы объёма.

Значит, если $\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\ dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$,

$\omega_B^{n-1} = b_i(t)\ dt^1 \wedge ... \wedge \widehat{dt^i} \wedge ... \wedge dt^n,$

а $B(t) = B_e^i(t)\, e_i(t)$ — разложение по ортам системы криволинейных координат $(t^1, ..., t^n)$, то

$$b_i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}}\; B_e^i \qquad\qquad B_e^i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det g_{ij}}}\; b_i\ .$$

Если система криволинейных координат ортогональная, действует прежнее соотношение $b_i = (-1)^{i-1}\sqrt{g_{11}\cdot \ldots \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot \ldots \cdot g_{nn}}\; B_e^i$.

В частности, для триортогональной системы криволинейных координат (t^1, t^2, t^3), используя упоминавшиеся в самом начале обозначения $E_i = g_{ii}$, можно написать следующее координатное представление формы ω_B^2, отвечающей вектору $B = B_e^1\, e_1 + B_e^2\, e_2 + B_e^3\, e_3$,

$$\omega_B^2 = B_e^1 \sqrt{E_2 E_3}\, dt^2 \wedge dt^3 + B_e^2 \sqrt{E_3 E_1}\, dt^3 \wedge dt^1 + B_e^3 \sqrt{E_1 E_2}\, dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \sqrt{E_1 E_2 E_3}\left(\frac{B_e^1}{\sqrt{E_1}}\, dt^2 \wedge dt^3 + \frac{B_e^2}{\sqrt{E_2}}\, dt^3 \wedge dt^1 + \frac{B_e^3}{\sqrt{E_3}}\, dt^1 \wedge dt^2 \right).$$

(Примите во внимание, что в трёхмерном случае 2-форму ω^2 обычно записывают не как $b_1 dt^2 \wedge dt^3 + b_2 dt^1 \wedge dt^3 + b_3 dt^1 \wedge dt^2$, а как $a_1 dt^2 \wedge dt^3 + a_2 dt^3 \wedge dt^1 + a_3 dt^1 \wedge dt^2$, например, $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$.)

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ укажите явный вид 2-формы $\omega_B^2 = \Omega_g^3(B, ...)$, отвечающей векторному полю $B = B_e^i\, e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ форма ω_B^2 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\omega_B^2 &= B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy = \\ &= B_r r\, d\varphi \wedge dz + B_\varphi\, dz \wedge dr + B_z r\, dr \wedge d\varphi = \\ &= B_R R^2 \cos\theta\, d\varphi \wedge d\theta + B_\varphi R\, d\theta \wedge dR + B_\theta R \cos\theta\, dR \wedge d\varphi.\end{aligned}$$

b. *Дифференциал формы потока и дивергенция поля скорости.*

Форму $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, ...)$ часто называют формой потока, поскольку в случае, когда B — поле скорости потока, именно эту форму приходится интегрировать (по крайней мере при $n = 3$), чтобы найти расход (поток) через поверхность.

Дифференциал формы потока ω_B^{n-1} есть n-форма, пропорциональная форме объёма. Коэффициент пропорциональности, как мы знаем, называется дивергенцией поля B.

Итак $d\omega_B^{n-1} = \operatorname{div} B\ \Omega_g^n$.

Мы хотим научиться по самому полю $B = B_e^i e_i$ находить его дивергенцию $\operatorname{div} B$.

Нам уже известно, как по полю $B = B_e^i e_i$ находится форма потока ω_B^{n-1}. Найдём её, вычислим её дифференциал, получим n-форму, пропорциональную форме объёма, коэффициент пропорциональности и будет дивергенцией поля B.

Реализуем это. Запишем $(n-1)$-форму ω_B^{n-1} в общем виде

$\omega_B^{n-1} = b_i(t)\ dt^1 \wedge ... \wedge \widehat{dt^i} \wedge ... \wedge dt^n$,

найдём её дифференциал

$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial t^i}(-1)^{i-1}\right)\ dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$,

выразим коэффициенты b_i формы ω^{n-1} через координаты B_e^i вектора $B = B_e^i e_i$

$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i}\left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}}\ B_e^i\right)\right)\ dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$,

сравним полученную форму с формой объёма

$\Omega_g^n = \sqrt{det g_{ij}}(t)\ dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$,

и найдём

$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i}\left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}}\ B_e^i\right)\right)$.

В ортогональной системе криволинейных координат эта формула принимает вид

$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{g_{11}\cdot\ldots\cdot g_{nn}}}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i}\left(\frac{\sqrt{g_{11}\cdot\ldots\cdot g_{nn}}}{\sqrt{g_{ii}}}\ B_e^i\right)\right)$.

c. *Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.*

Задача. Напишите формулы для вычисления дивергенции векторного поля $B = B_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ дивергенция $\operatorname{div} B$ векторного поля $B = B_e^i e_i$ вычисляется соответственно по формулам

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} B &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial R B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R\cos\theta B_\theta}{\partial \theta}\right).
\end{aligned}
$$

3. Ротор векторного поля и его координатное представление.

a. *Соответствие векторное поле A — векторное поле $B = \operatorname{rot} A$.*

Рассмотрим теперь особо трехмерный случай. Будем, как и выше, считать, что в криволинейных координатах (t^1, t^2, t^3) нам задана метрика $g_{ij}(t)dt^i dt^j$, порождающая, заодно, форму объёма $\Omega_g^3 = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\ dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3$.

В этом случае векторному полю $A = A_e^i e_i$ сопоставляется 1-форма ω_A^1, а дифференциалу $d\omega_A^1$ этой формы, как 2-форме (как $(n-1)$-форме), соответствует некоторое векторное поле $B = B_e^i e_i$, такое, что $d\omega_A^1 = \omega_B^2$. Это поле B, как мы знаем, называется ротором исходного поля A и обозначается $\operatorname{rot} A$.

b. *Координатная запись соответствия A и $B = \operatorname{rot} A$.*

Мы хотим научиться вычислять координаты поля $B = \operatorname{rot} A$ по координатам поля A. В соответствии с описанной выше процедурой по полю $A = A_e^i e_i$ строим отвечающую ему 1-форму $\omega_A^1 = \langle A, .\rangle$

$\omega_A^1 = a_i\ dt^i = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j\ dt^i$,

берем её дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega_A^1 &= \frac{\partial}{\partial t^k}\left(\frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right)\ dt^k \wedge dt^i = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right) - \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right)\right)\ dt^2 \wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3}\left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right) - \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right)\right)\ dt^3 \wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right) - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}}A_e^j\right)\right)\ dt^1 \wedge dt^2, \end{aligned}$$

рассматривая эту форму как форму вида ω_B^2, по коэффициентам формы $\omega_B^2 = d\omega_A^1 = b_1\ dt^2 \wedge dt^3 - b_2\ dt^3 \wedge dt^1 + b_3\ dt^1 \wedge dt^2$ находим координаты $B_e^i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\ b_i$ вектора $B = \operatorname{rot} A$.

В случае триортогональной системы криволинейных координат (t_1, t_2, t_3) формулы упрощаются. В этом случае

$$\begin{aligned} d\omega_A^1 &= \frac{\partial}{\partial t^k}\left(\sqrt{g_{ii}}A_e^i\right)\ dt^k \wedge dt^i = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{g_{33}}A_e^3\right) - \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{g_{22}}A_e^2\right)\right)\ dt^2 \wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{g_{11}}A_e^1\right) - \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{g_{33}}A_e^3\right)\right)\ dt^3 \wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{g_{22}}A_e^2\right) - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{g_{11}}A_e^1\right)\right)\ dt^1 \wedge dt^2, \end{aligned}$$

и, используя обозначения $E_i := g_{ii}$ можно написать координаты вектора $\operatorname{rot} A = B = B_e^1\ e_1 + B_e^2\ e_2 + B_e^3\ e_3$

$$B_e^1 = \frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A_e^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A_e^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),$$
$$B_e^2 = \frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A_e^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A_e^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),$$
$$B_e^3 = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A_e^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A_e^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),$$

то есть

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix} \sqrt{E_1}e_1 & \sqrt{E_2}e_2 & \sqrt{E_3}e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \sqrt{E_1}A_e^1 & \sqrt{E_2}A_e^2 & \sqrt{E_3}A_e^3 \end{vmatrix}.$$

c. *Ротор в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.*

Задача. Напишите формулы для вычисления ротора векторного поля $A = A_e^1e_1 + A_e^2e_2 + A_e^3e_3$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ ротор $\operatorname{rot} A$ векторного поля $A = A_e^1e_1 + A_e^2e_2 + A_e^3e_3$ вычисляется соответственно по формулам

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)e_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)e_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)e_z =$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)e_z =$$
$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi\cos\theta}{\partial \theta}\right)e_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial RA_\theta}{\partial R}\right)e_\varphi +$$
$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)e_\theta.$$